

553-4

Enoncé. Un médecin a calculé qu'un traitement est efficace sur 52,05% de ses patients, arrondi au centième. La maladie touche moins de 100 de ses patients. Déterminer le nombre exact de patients atteints et pour combien le traitement a été efficace.

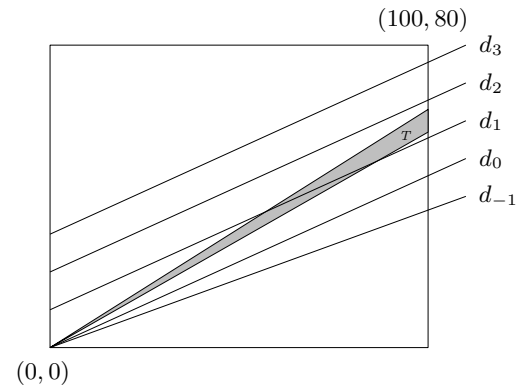
Soit a le nombre de patients traités et b celui de ceux traités efficacement. L'énoncé se traduit par :

a et b entiers naturels non nuls, $0 < a \leq 100$, $0,52045 \leq \frac{b}{a} \leq 0,52055$ c'est à dire $0,52045a \leq b \leq 0,52055a$

Interprétation graphique : trouver les points à coordonnées entières autres que $(0,0)$ dans le triangle plein

$$M(x, y) \in T \iff \begin{cases} x \leq 100 \\ 0,52045x \leq y \\ y \leq 0,52055x \end{cases}$$

T est très étroit. Pour mieux illustrer le raisonnement il est représenté plus large qu'il est en réalité



Soit d_0 la droite d'équation $y = 0,52x \iff 100y = 52x \iff 13x - 25y = 0$

et d_k sa parallèle d'équation $13x - 25y + k = 0 \iff y = 0,52x + 0,04k$.

Les points à coordonnées entières sont tous sur les droites d_k où k est entier. ($A(a, b)$ est sur $d_{13a-25b}$)

Pour k entier autre que 1, d_k ne rencontre pas T . (1)

Le point de coordonnées $(73, 38)$ est le seul de T à coordonnées entières. (2)

Conclusion : 73 patients ont été atteints, le traitement a été efficace pour 38 d'entre eux

(1) Soit $M(x, y)$ un point de d_k où k est un entier.

- Si $k \leq 0$, $y = 0,52x + 0,04k \leq 0,052x < 0,52045x$ si $x > 0$ donc $(x, y) \notin T$
- Si $k \geq 2$, $y = 0,52x + 0,04k \geq 0,052x + 0,08 \geq 0,052x + 0,0008x > 0,52055x$ si $0 < x \leq 100$ donc $(x, y) \notin T$

$$(2) 13x - 25y + 1 = 0 \iff 13(x + 2) = 25(y + 1) \iff \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -2 + 25t \\ y = -1 + 13t \end{cases}$$

Si t est entier x et y aussi, et réciproquement si x et y sont entiers, $t = 2y - x$ l'est aussi

Je note $M_t(x_t = -2 + 25t, y_t = -1 + 13t)$ le point de d_1 de paramètre t . On a $y_t = 0,52x_t + 0,04$

$$M_t \in T \iff \begin{cases} 0 < x_t \leq 100 \\ 0,52045x_t \leq y_t \leq 0,52055x_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0,52045x_t \leq y_t \leq 0,52055x_t &\iff 0,52045x_t \leq 0,52x_t + 0,04 \leq 0,52055x_t \\ &\iff 0,00045x_t \leq 0,04 \leq 0,00055x_t \\ &\iff 72 + \frac{8}{11} \leq x_t \leq 88 + \frac{8}{11} \\ &\iff 74 + \frac{8}{11} \leq 25t \leq 90 + \frac{8}{11} \end{aligned}$$

3 est le seul entier vérifiant cet encadrement, $M_3(73, 38)$ est le seul point de T à coordonnées entières