

Étude des triplets d'entiers strictement positifs tels que :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \text{ soit entier.}$$

Patrick David (daiweide1@gmail.com)

Mars 2024

Exercice

Soient x, y, z trois entiers strictement positifs tels que :
 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ soit entier, alors le produit xyz est un cube d'entiers.

1. Propriétés préliminaires et notations.

On dit que $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ est une solution, si $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ est entier.

Remarque : Si $\text{pgcd}(x, y, z) = d$, et si $x = dx', y = dy', z = dz'$ avec $\text{pgcd}(x', y', z') = 1$,

$$\text{on a } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{dx'}{dy'} + \frac{dy'}{dz'} + \frac{dz'}{dx'} = \frac{x'}{y'} + \frac{y'}{z'} + \frac{z'}{x'}.$$

De plus $xyz = d^3 x' y' z'$. On peut limiter l'étude au cas où le $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$. Une solution au problème posé sera alors qualifiée de **solution primitive**.

2. Condition nécessaire pour être une solution primitive.

Proposition 1: Si (x, y, z) est une solution primitive, alors :

1. (y, z, x) et (z, x, y) obtenues par permutation circulaires sont aussi des solutions primitives.

$$2. \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2 z + y^2 x + z^2 y}{xyz}$$

3. (x, y, z) est une solution si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad x^2 z + y^2 x + z^2 y - kxyz = 0$$

4. Si p est un diviseur premier d'un des (x, y, z) , alors nécessairement p divise un des deux autres, mais ne divise pas le troisième.

Démonstration :

$$1. \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$$

2. Réduction au même dénominateur immédiate.

3. Calcul immédiat avec $k = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ entier naturel non nul.

4. Comme $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, p ne peut pas diviser en même temps x, y et z .

Par permutation circulaire d'après le 1., supposons que p divise x et ne divise ni y , ni z . Alors $z^2 y$ ainsi que $x^2 z + y^2 x + z^2 y$ n'est pas divisible par p , alors que xyz est divisible par p . Donc dans ce cas $\frac{x^2 z + y^2 x + z^2 y}{xyz}$ n'est pas entier et (x, y, z) n'est pas une solution.

Soit p un nombre premier qui divise deux des trois entiers x, y et z . On note $\alpha_x = v_p(x)$, $\alpha_y = v_p(y)$ et $\alpha_z = v_p(z)$, et $\alpha_k = v_p(k)$ les trois valuations pour ce nombre premier. Par hypothèse une des trois valuations est nulle et les deux autres sont strictement positives. On peut écrire :

$x = x'p^{\alpha_x}$, $y = y'p^{\alpha_y}$, $z = z'p^{\alpha_z}$ et $k = k'p^{\alpha_k}$ avec x', y' et z' premiers à p . On peut alors écrire la formule 2. de la proposition 1 sous la forme :

$$x'^2 z' p^{2\alpha_x + \alpha_z} + y'^2 x' p^{2\alpha_y + \alpha_x} + z'^2 y' p^{2\alpha_z + \alpha_y} - k' x' y' z' p^{\alpha_k + \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z} = 0. (*)$$

Les exposants de p sont $(2\alpha_x + \alpha_z, 2\alpha_y + \alpha_x, 2\alpha_z + \alpha_y, \alpha_k + \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)$.

Proposition 2: Si (x, y, z) est une solution primitive alors :

1. Si $\alpha_x = 0$ et $(\alpha_y, \alpha_z) \in \mathbb{N}^{*2}$, alors $2\alpha_y = \alpha_z$. Dans ce cas $v_p(xyz) = 0 + \alpha_y + \alpha_z = 3\alpha_y$.
2. Si $\alpha_y = 0$ et $(\alpha_x, \alpha_z) \in \mathbb{N}^{*2}$, alors $2\alpha_z = \alpha_x$. Dans ce cas $v_p(xyz) = \alpha_x + \alpha_z = 3\alpha_z$.
3. Si $\alpha_z = 0$ et $(\alpha_x, \alpha_y) \in \mathbb{N}^{*2}$, alors $2\alpha_x = \alpha_y$. Dans ce cas $v_p(xyz) = \alpha_x + \alpha_y = 3\alpha_x$.
4. Pour tout facteur premier p de xyz , $v_p(xyz)$ est un multiple de 3, donc xyz est un cube d'entier naturel non nul.

Démonstration :

1. Pour $\alpha_x = 0$ et $x = x'$, les exposants de p dans (*) sont $(\alpha_z, 2\alpha_y, 2\alpha_z + \alpha_y, \alpha_k + \alpha_y + \alpha_z)$.

Or on a $\alpha_z < 2\alpha_z + \alpha_y$ et $\alpha_z < \alpha_k + \alpha_y + \alpha_z$. On ne peut pas préciser pour l'instant la position de $2\alpha_y$.

Comme les coefficients $x' = x$, y' , z' sont premiers à p et non nuls, pour avoir une égalité à 0, il est nécessaire que la puissance de p de plus petit exposant ait un coefficient nul, ce qui est impossible avec un seul terme à coefficient non nul. Il y a donc nécessairement deux des quatre facteurs avec l'exposant de p égal. On doit donc avoir $2\alpha_y = \alpha_z$, car $2\alpha_z + \alpha_y$ ni $\alpha_k + \alpha_y + \alpha_z$ ne peuvent être des minima.

Par division de (*) par $2\alpha_y = \alpha_z$, on obtient donc $x^2 z' + y'^2 x + z'^2 y' p^{\alpha_z + \alpha_y} - k' x y' z' p^{\alpha_k + \alpha_y} = 0$.

On peut remarquer que nécessairement $\alpha_z = \alpha_k$ et que la somme $x^2 z' + y'^2 x$ doit aussi donner un terme du type $up^{\alpha_z + \alpha_y}$ pour que l'expression (*) s'annule. Mais cette constatation est difficile à utiliser.

2. 3. Se démontrent de la même manière en faisant la permutation circulaire $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

4. Dans chacun des cas et pour n'importe quel facteur premier p , on obtient $xyz = p^{3\beta} x' y' z'$ avec β entier naturel non nul et $x' y' z'$ premier à p .