

## 553-1 Une somme circulaire

Soit  $d$  le pgcd de  $x, y, z$ .

En remplaçant  $x, y, z$  par  $\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}$ , la somme  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$  ne change pas et si  $xyz$  est un cube,  $\frac{x}{d} \cdot \frac{y}{d} \cdot \frac{z}{d}$  est un cube aussi.

Donc on peut se ramener au cas où  $x, y, z$  sont premiers entre eux.

L'équation s'écrit :  $x^2z + y^2x + z^2y = n \cdot xyz$  , avec  $n$  entier (E)

**Premier cas :**  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  est une solution évidente :  $n = 3$  et  $xyz = 1$  est un cube

**Deuxième cas :** Un nombre premier  $p$  divise un et un seul des trois nombres  $x, y, z$

Par permutation circulaire sur  $x, y, z$ , on peut supposer que  $p$  divise  $x$

Alors  $x = p \cdot u$  et l'équation (E) s'écrit :  $p^2 \cdot u^2z + p \cdot y^2u + z^2y = p \cdot n \cdot uyz$

Mais alors  $p$  diviserait  $z^2y$  , donc diviserait  $y$  ou  $z$ , ce qui est impossible.

Il n'y a donc pas de solution pour (E) dans ce deuxième cas.

**Troisième cas :** Tout facteur premier  $p$  de  $xyz$  divise deux nombres parmi  $x, y, z$

Par permutation circulaire sur  $x, y, z$ , on peut supposer que ces nombres sont  $x$  et  $y$ .

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les  $p$ -valuations de  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} x = p^\alpha \cdot u \\ y = p^\beta \cdot v \end{cases}$$

Alors l'équation (E) s'écrit :  $p^{2\alpha} \cdot u^2z + p^{\alpha+2\beta} \cdot v^2u + p^\beta \cdot z^2v = p^{\alpha+\beta} \cdot n \cdot uvz$

Si  $\beta < 2\alpha$  alors  $p$  divise  $z^2v$ , donc divise  $z$  et  $v$ , ce qui est impossible.

Si  $\beta > 2\alpha$  alors  $p$  divise  $u^2z$ , donc divise  $u$  et  $z$ , ce qui est impossible.

Donc :  $\beta = 2\alpha$

La  $p$ -valuation de  $xyz$  est donc  $3\alpha$ .

Donc  $xyz$  est un cube.

### Les premières solutions

|                             |          |              |
|-----------------------------|----------|--------------|
| $(x, y, z) = (1, 1, 1)$     | $n = 3$  | $xyz = 1^3$  |
| $(x, y, z) = (1, 2, 4)$     | $n = 5$  | $xyz = 2^3$  |
| $(x, y, z) = (2, 12, 9)$    | $n = 6$  | $xyz = 6^3$  |
| $(x, y, z) = (2, 36, 81)$   | $n = 41$ | $xyz = 18^3$ |
| $(x, y, z) = (3, 18, 4)$    | $n = 6$  | $xyz = 6^3$  |
| $(x, y, z) = (12, 63, 98)$  | $n = 9$  | $xyz = 42^3$ |
| $(x, y, z) = (18, 28, 147)$ | $n = 9$  | $xyz = 42^3$ |