

553-2 Suite universelle

On va montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de suite universelle.

Supposons qu'il existe une suite universelle $(a_n)_{n \geq 0}$

En utilisant comme suite bornée $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite constante 1, on déduit que la série de terme général a_n est convergente.

Comme la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, il existe une suite strictement croissante d'indices $(k_n)_{n \geq 0}$ telle que : $a_{k_n} < \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)}$ pour tout entier naturel n

On définit alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :
$$\begin{cases} u_{k_n} = n & \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul} \\ u_m = 0 & \text{si } m \text{ n'est pas un terme de la suite } (k_n) \end{cases}$$

La série de terme général $(a_n \cdot u_n)_{n \geq 0}$ converge absolument puisque les sommes partielles de la série sont positives ou nulles et majorées par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$

Mais la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.

Ceci est en contradiction avec l'équivalence de la définition des suites universelles.