

Une solution au problème 553-2

Pierre-Alain Sallard

2 janvier 2025

Il s'agit de répondre à la question : existe-t-il une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de réels strictement positifs telle que, pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$, la série de terme général $a_n u_n$ est absolument convergente si et seulement si la suite (u_n) est bornée ?

On peut reformuler le problème en notant P la proposition suivante :

Il existe $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que, pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$,
la série $\sum a_n u_n$ converge $\implies$ la suite (u_n) est bornée
et la suite (u_n) est bornée $\implies$ la série $\sum a_n u_n$ converge

et il s'agit donc d'évaluer la véracité de P.

Nous allons prouver que non P est vraie, ce qui consiste à prouver la proposition

Pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que,
(la série $\sum a_n u_n$ converge et la suite (u_n) n'est pas bornée)
ou (la suite (u_n) est bornée et la série $\sum a_n u_n$ diverge)

Nous utiliserons les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge. Alors $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Démonstration. On note R_n le reste partiel de la série $\sum a_n$. Par positivité et décroissance de (a_n) , on a $0 \leq na_{2n} \leq a_{n+1} + \dots + a_{2n} \leq R_n$. Alors, en multipliant par 2 et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n)a_{2n} = 0$.

On montre de la même façon que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$. La suite de terme général na_n a donc deux sous-suites complémentaires qui tendent vers une même limite nulle : ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$, ce qui fournit le résultat. $\square$

Théorème 2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Alors la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite décroissante.

Démonstration. Exercice classique, dont la preuve est laissée au lecteur. $\square$

Revenons à l'objet du problème :

Propriété. La proposition non P est vraie.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Premier cas : la série $\sum a_n$ diverge.

La suite constante $(u_n)_{n \geq 0}$ où chaque terme est égal à 1 est évidemment une suite bornée et la série $\sum a_n u_n$, qui coïncide avec la série $\sum a_n$, diverge par hypothèse.

La clause (la suite (u_n) est bornée et la série $\sum a_n u_n$ diverge) est donc bien vérifiée, ce qui permet de conclure que, dans ce premier cas, non P est bien vérifiée.

Second cas : la série $\sum a_n$ converge.

Effectuons une nouvelle distinction de cas, selon que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante ou non.

— Si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, alors d'après le théorème 1, $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On définit alors la suite $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $u_n = \begin{cases} 2^{\ln(n)/\ln(3)} & \text{si } n \text{ est une puissance de } 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Cela revient à dire

que, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3^k$, alors $u_n = 2^k$ et $u_n = 0$ sinon. Il est clair que, par construction, la suite (u_n) n'est pas bornée.

Pour tout entier naturel N , $\sum_{n=0}^N \frac{u_n}{n} = \sum_{0 \leq k \leq \ln(N)/\ln(3)} \frac{2^k}{3^k}$, ce qui correspond à une somme partielle d'une série géométrique convergente, car de raison $\frac{2}{3}$.

Puisque $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a donc $a_n u_n = o\left(\frac{u_n}{n}\right)$ et les théorèmes usuels sur les séries à termes positifs permettent de conclure que la série $\sum a_n u_n$ converge.

- Si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ n'est pas décroissante, on peut d'après le théorème 2 en extraire une sous-suite décroissante car elle est positive de limite nulle. Ainsi il existe une application $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(a_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ est décroissante.

On applique à cette sous-suite le résultat précédent pour obtenir l'existence d'une suite $(u'_n)_{n \geq 0}$ positive non bornée telle que la série $\sum a_{\phi(n)} u'_n$ converge.

On définit alors la suite $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par $u_n = \begin{cases} u'_{\phi^{-1}(n)} & \text{si } n \in \phi(\mathbb{N}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Cette suite (u_n) n'est pas bornée puisque

(u'_n) ne l'est pas ; et les termes non nuls de la série $\sum a_n u_n$ sont ceux de la série convergente $\sum a_{\phi(n)} u'_n$ donc la série $\sum a_n u_n$ est également convergente.

Dans la cas où la série $\sum a_n$ converge, on a donc établi l'existence d'une suite $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que la clause (la série $\sum a_n u_n$ converge et la suite (u_n) n'est pas bornée) est vérifiée. Il vient donc que, là-aussi, non P est bien vérifiée.

Au final, dans les deux cas, la proposition non P est donc vraie car au moins l'une des deux clauses (la série $\sum a_n u_n$ converge et la suite (u_n) n'est pas bornée) **ou** (la suite (u_n) est bornée et la série $\sum a_n u_n$ diverge) est établie. $\square$