

Une solution au problème 553-3

Pierre-Alain Sallard

6 octobre 2024

Il s'agit de répondre à la question : existe-t-il une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier naturel n , $f \circ f(n) = n^2$?

Nous allons montrer qu'il existe une telle fonction (*et même une infinité*) en la construisant par un procédé itératif.

1 Préliminaires : notations

Étant donné une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et un entier naturel n , on notera $\mathcal{P}_n^f$ la propriété : $f \circ f(n) = n^2$.

Par ailleurs, étant donné deux entiers naturels n, p tels que $2 \leq n < p$, on notera $V^{(n,p)} = \left(v_i^{(n,p)} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0^{(n,p)} = n, v_1^{(n,p)} = p \\ v_{i+2}^{(n,p)} = \left(v_i^{(n,p)} \right)^2, \quad \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall i \in \mathbb{N}$, $v_{2i}^{(n,p)} = n^{2^i}$ et $v_{2i+1}^{(n,p)} = p^{2^i}$.

2 Construction d'une fonction f

On construit une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en définissant l'image $f(n)$ de chaque entier naturel n .

On commence par poser $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, de sorte que les propriétés $\mathcal{P}_0^f$ et $\mathcal{P}_1^f$ sont bien vérifiées.

Puis on parcourt $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dans l'ordre croissant pour définir f sur cet ensemble par le procédé itératif décrit ci-après.

On suppose que f a déjà été définie sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$ pour un entier naturel $n \geq 2$ quelconque et on fait la distinction de cas suivante :

— Cas n° 1 : si l'image de n n'a pas encore été définie :

- On pose $p_n = \min \left(j \in \mathbb{N}, j > n \text{ et } j \notin (n^{2^k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } f(j) \text{ n'est pas encore défini} \right)$. On justifie plus bas l'existence de cet entier p_n .
- On introduit la suite $V^{(n,p_n)}$ et on définit les images de chacun des termes de cette suite par :

$$f \left(v_i^{(n,p_n)} \right) = v_{i+1}^{(n,p_n)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

On justifie plus bas que, quel que soit l'entier naturel i , l'image de $v_i^{(n,p_n)}$ n'était pas encore définie : ceci garantit alors la licéité de la définition de $f \left(v_i^{(n,p_n)} \right)$ effectuée ci-dessus.

- Puis on recommence avec l'entier $n+1$ suivant.

— Cas n° 2 : si l'image de n est déjà définie lors d'une étape précédente, on ne fait rien et on passe à l'entier $n+1$ suivant.

Propriété. Avec la construction de f décrite ci-dessus, tout entier naturel n a bien une image et l'égalité $f \circ f(n) = n^2$ est vérifiée.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Le procédé itératif parcourt $\mathbb{N}$ dans l'ordre croissant et atteint l'entier n . On effectue une distinction de cas selon la situation à cette étape.

Premier cas : $f(n)$ n'est pas encore définie mais alors on détermine un entier p_n et $f(n)$ est définie par $f(n) = p_n$ (en effet, n est le premier terme de la suite $V^{(n,p_n)}$ et son image par f est le second terme, à savoir p_n). En outre, par construction de la suite $V^{(n,p_n)}$, $f(p_n) = f(v_1^{(n,p_n)}) = v_2^{(n,p)} = \left(v_0^{(n,p_n)} \right)^2 = n^2$. Ainsi $f \circ f(n) = n^2$ et $\mathcal{P}_n^f$ est vérifiée.

Deuxième cas : $f(n)$ était déjà définie, ce qui veut dire qu'il existe un entier $n' < n$ tel que n est l'un des termes de la suite $V^{(n',p_{n'})}$. Notons k l'entier tel que $n = v_k^{(n',p_{n'})}$: par construction, $f \circ f(n) = f \circ f \left(v_k^{(n',p_{n'})} \right) = v_{k+2}^{(n',p_{n'})} = \left(v_k^{(n',p_{n'})} \right)^2 = n^2$.

Ainsi $\mathcal{P}_n^f$ est vérifiée également dans ce cas.

□

Remarque : dans le procédé itératif, on peut aussi définir l'entier p_n comme étant le x -ième plus petit élément (avec un entier non nul x quelconque) de l'ensemble $\left(j \in \mathbb{N}, j > n \text{ et } j \notin (n^{2^k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } f(j) \text{ n'est pas encore défini} \right)$: ceci conduit à la construction d'une autre fonction qui vérifiera elle-aussi la propriété recherchée. Il existe ainsi une infinité de fonctions qui sont solutions du problème proposé.

3 Preuves

3.1 Preuve de l'existence de p_n

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on pose $E_n = \bigcup_{2 \leq a < b \leq n} V(a, b)$.

Montrons que E_n est distinct de $\mathbb{N}$ en exhibant un entier naturel p tel que $p \notin E_n$. Soit p un nombre premier strictement supérieur à n : p ne peut pas appartenir à E_n car sinon il existe des entiers $a, b \leq n$ et $i \in \mathbb{N}$ tel que $p = a^{2^i}$ ou $p = b^{2^i}$, ce qui contredirait le caractère premier de p .

Ainsi $\mathbb{N} \setminus E_n$ est non vide. Or, d'après le procédé de construction de la fonction f à l'étape n , l'ensemble $\left(j \in \mathbb{N}, j > n \text{ et } j \notin (n^{2^k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } f(j) \text{ n'est pas encore défini} \right)$ contient $\mathbb{N} \setminus E_n$. Cet ensemble est donc non vide et, étant minoré par n , il admet un plus petit élément : d'où l'existence de p_n .

3.2 Preuve de l'absence de définition préalable de l'image de $v_i^{(n, p_n)}$

Soient un entier $n \geq 2$ et $i \in \mathbb{N}$: l'objectif est de justifier le fait que, à l'étape n du procédé de construction de la fonction f , l'image par f de $v_i^{(n, p_n)}$ n'a pas été définie préalablement si on est dans le cas n° 1.

Premièrement, chaque terme de la suite $V^{(n, p_n)}$ est distinct des autres termes de cette suite. En effet, chaque terme de cette suite est de la forme n^{2^j} ou $p_n^{2^j}$. Le fait que $n < p_n$ et que p_n ne soit pas de la forme n^{2^k} rend alors impossible l'égalité de deux termes. Ainsi, lorsque l'on définit les images des termes de la suite $V^{(n, p_n)}$ par $\forall j, f(v_j^{(n, p_n)}) = v_{j+1}^{(n, p_n)}$, on ne définit pas deux fois l'image d'un même terme.

Deuxièmement, les termes de la suite $V^{(n, p_n)}$ sont distincts de ceux des suites préalablement construites, de la forme $V^{(m, p_m)}$ avec $m < n$. En effet, puisqu'on est par hypothèse dans le cas n° 1, n n'est pas de la forme m^{2^j} ou $p_m^{2^j}$ puisque son image n'a pas encore été définie. Et il en va de même pour p_n , par définition même de p_n . Considérons un terme de la suite $V^{(n, p_n)}$ de la forme n^{2^k} : s'il appartenait à $V^{(m, p_m)}$, il existerait $j \in \mathbb{N}$ tel que $n^{2^k} = m^{2^j}$ ou bien $n^{2^k} = p_m^{2^j}$. Dans le premier cas, $m < n \implies k < j \implies n = m^{2^{j-k}}$, mais ceci est exclu d'après la remarque précédente. Et dans le second cas, on a également $p_m < n$ puisque p_m ainsi que son image ont été construites à l'étape $m < n$ et qu'on est par hypothèse dans le cas n° 1 où n n'a pas encore d'image. On en tire comme précédemment que $k < j$ et donc que $n = p_m^{2^{j-k}}$, ce qui est exclu. On montre de la même manière qu'un terme de la suite $V^{(n, p_n)}$ de la forme $p_n^{2^k}$ ne peut pas appartenir à $V^{(m, p_m)}$. Ainsi, aucun des termes de la suite $V^{(n, p_n)}$ n'apparaît dans les suites construites antérieurement et donc, *a fortiori* aucun d'entre eux n'a vu son image préalablement définie.

4 Programme de calcul des images et tracé graphique

Le programme ci-dessous écrit en langage Python permet la construction d'un tableau f de taille $N_{\max}$ dont l'élément d'indice i est égale à l'image de i par la fonction f telle que décrite en partie 2.

```
def recherche_p_de_n(tab, n):
    j = n+1
    while j < len(tab):
        k = int( log(log(j)/log(n))/log(2) )
        if j != n**(2**k) and tab[j] is None:
            return j
        j = j+1
    return -1 # cas où p_de_n > Nmax

Nmax = 10000
f = [None] * Nmax
f[0] = 0
f[1] = 1
for n in range(2, len(f)):
    if f[n] is None:
        p = recherche_p_de_n(f, n)
        if p == -1:
```

```

        break
a = n
while a < len(f) :
    f[a] = p
    if p < len(f) :
        f[p] = a**2
    a = a**2
    p = p**2

```

Le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10000]$ se superpose partiellement à celui de la fonction $n \mapsto n + 1$ et à celui de la fonction $p \mapsto (p - 1)^2$, ce qui correspond aux cas (fréquents) où $p_n = n + 1$.

