

553-3. Une équation fonctionnelle (Jean-Christophe Laugier - Rochefort)

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(f \circ f)(n) = n^2$ pour tout entier n ?

Solution proposée par Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie.

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(n_1) = f(n_2).$$

Il suit que

$$(f \circ f)(n_1) = (f \circ f)(n_2) \Leftrightarrow n_1^2 = n_2^2. \quad (1)$$

Mais $n_1^2 = n_2^2 \Leftrightarrow n_1^2 - n_2^2 = 0 \Leftrightarrow (n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = 0$, d'où $n_1 = n_2$ et f est injective.

On a

$$(f \circ f)(n) = n^2 \Rightarrow f(f(f(n))) = f(n^2). \quad (2)$$

Mais

$$f(f(f(n))) = f^2(n), (\forall) n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Il suit que

$$f^2(n) = f(n^2), (\forall) n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Si on connaît $f(a)$, il suit que $f(a^2) = f^2(a)$, et alors $f(a^4) = f((a^2)^2) = (f(a^2))^2 = f^4(a)$. Il suit, par induction, que $f(a^{2^n}) = f^{2^n}(a)$. Si on calcule $f(a^{2^{n+1}})$, on a $f(a^{2^{n+1}}) = f((a^{2^n})^2) = f^2(f(a^{2^n})) = f^2(f^{2^n}(a)) = f^{2^{n+1}}(a)$, pour $a \in \mathbb{N}$.

On a $f(1)^2 = f(1)$, ce qui équivaut à $f(1) \in \{0, 1\}$ et $f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) \in \{0, 1\}$.

Dans la conclusion, il existe une application injective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$(f \circ f)(n) = n^2, (\forall) n \in \mathbb{N}.$$