

Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle $f \circ f(n) = n^2$?

Si une telle fonction f existe ,elle est nécessairement injective car si $f(x) = f(y)$ alors $f(f(x)) = f(f(y))$ on obtient alors $x^2 = y^2$ et comme x et y sont des entiers naturels $x = y$

On va construire une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant la condition $f \circ f(n) = n^2$ pour tout entier naturel n .

$f(0) = 0$ convient car $f(f(0)) = f(0) = 0 = 0^2$, $f(1) = 1$ convient car $f(f(1)) = f(1) = 1 = 1^2$

Recherchons $f(2)$: $f \circ f(2) = 2^2 = 4$

Si $f(2) = 0$ alors $f(f(2)) = f(0) = 0$ impossible car $f \circ f(2) = 4$

$f(2) = 1$ alors $f(f(2)) = f(1) = 1$ impossible

si $f(2) = 2$ alors $f(f(2)) = f(2) = 2$ impossible donc $f(2) \geq 3$

Choisissons $f(2) = 3$ dans ce cas $f(3) = f(f(2)) = 2^2 = 4$ et $f(4) = f(f(3)) = 3^2 = 9$

On va construire deux listes $[x]$ et $[y]$ de façon progressive Les résultats précédents permettent d'établir les premiers termes des suites $[x]$ et $[y]$

Les termes de la suite $[y]$ sont les images par f des termes de la suite $[x]$

$[x] = [0, 1, 2, 3, 4]$ et $[y] = [0, 1, 3, 4, 9]$

Les termes suivants 5 , 6 , 7 et 8 de la liste $[x]$ ne sont pas des images car ils ne figurent pas dans la liste $[y]$ mais 9 est dans la liste $[y]$, $9 = f(4)$ alors $f(9) = f(f(4)) = 4^2 = 16$.

$[x] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

$[y] = [0, 1, 3, 4, 9, \dots, \dots, 16]$

Comme la fonction cherchée étant strictement croissante et que $f(4) = 9$, les images de 5,6,7,8 sont des entiers naturels strictement supérieurs à 9 et strictement inférieurs à $f(9) = f(f(4)) = 16$

On choisit par exemple $f(5) = 10$, $f(6) = 11$, $f(7) = 12$ et $f(8) = 13$ d'où

$[x] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

$[y] = [0, 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16]$

Déterminons maintenant les images par f des entiers de 10 à 16.

Les nombres 10,11,12,13 sont les images respectives de 5,6,7,8 ,

16 est une image mais 14 et 15 ne sont pas des images

$f(10) = f(f(5)) = 5^2 = 25$, $f(11) = f(f(6)) = 6^2 = 36$, $f(12) = f(f(7)) = 7^2 = 49$ et $f(13) = f(f(8)) = 8^2 = 64$. et comme 16 est l'image de 9 , $f(16) = f(f(9)) = 9^2 = 81$

Les listes $[x]$ et $[y]$ sont maintenant :

$[x] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$

$[y] = [0, 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 25, 36, 49, 64, \dots, 81]$

Il reste à trouver les images de 14 et de 15.

Comme $f(13) = 64$, les images de $f(14)$ et de $f(15)$ sont comprises entre 64 et 81 , on choisit tout simplement les entiers naturels suivant 64 donc $f(14) = 65$ et $f(15) = 66$

d'où $[x] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]$

et $[y] = [0, 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 25, 36, 49, 64, 65, 66, 81]$

On continue le procédé , on détermine alors les images des entiers naturels entre 16 et 25. 25 étant le terme suivant 16 dans la liste $[y]$.

$f(16) = f(f(9)) = 81$,comme 17,18,19,20,21,22,23,24 ne sont pas des images dans la liste $[y]$.

On choisit $f(17) = 82$, $f(18) = 83$, ..., $f(24) = 89$

$f(25) = f(f(10)) = 10^2 = 100$. On a donc trouver les images de tous les entiers naturels de 0 à 25.

$[x] = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]$

$[y] = [0, 1, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 25, 36, 49, 64, 65, 66, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 100]$.

Comme dans la liste $[y]$,36 est l'entier naturel qui suit 25, il faut trouver les images des nombres 26 , 27 , ...,35.

On procède la même façon. $f(25) = 100$,comme 26,27 ,... 35 ne sont pas des images dans la liste $[y]$,

on choisit $f(26) = 101$, $f(27) = 102$, ..., $f(35) = 110$

Plus généralement :

Considérons la suite $[x] = [0, 1, 2, 3, 4, \dots, n^2]$

et $[y] = [0, 1, 3, 4, 9, \dots, f(n^2)]$ la suite des images de la liste $[x]$

alors considérons la liste $[x] = [0, 1, 2, 3, 4, \dots, n^2, \dots, (n+1)^2]$ alors

déterminons les images des entiers naturels compris entre

n^2 et $(n+1)^2$

soit p un entier naturel de la liste $[x]$ supérieur à n^2

Si p est dans la liste $[y]$ alors il existe un entier naturel q tel que $f(q) = p$ alors $f(p) = f(f(q)) = q^2$

Si p n'est pas dans la liste $[y]$, il se trouve entre deux carrés consécutifs de la liste $[y]$, il existe un entier naturel r tels que $r^2 < p < (r+1)^2$ alors $f(r^2) < f(p) < f((r+1)^2)$.

soit $d = p - r^2$ alors $f(p) = f(r^2) + d$

Cette méthode permet de trouver l'image par f de tout entier naturel n , et vérifiant $ff(n) = n^2$

Programme en python :

```
from math import *
import numpy as np
x=[]
y=[]
print("la liste y est la liste des images des entiers de la liste x")
y.append(0)
y.append(1)
y.append(3)
y.append(9)
print(y)
print("choisir un entier naturel supérieur à 3 strictement")
p=int(input("p"))
for i in range(p+1):
    x.append(i)
print("x=",x)
print("y=",y)
for i in range(5,p+1):
    if i in y:
        print(i,"est dans la liste y")
        a=y.index(i)
        print("L'antecedent de ",i,"est",a)
        y.append(int(pow(a,2)))
        print("L'image de ",i,"est",int(pow(a,2)))
    else:
        print(i,"n'est pas dans la liste")
        y.append(y[i-1]+1)
        print("L'image de ",i,"est",y[i-1]+1)
print("y=",y)
```

En exécutant le programme, on trouve l'image de tout entier naturel puis si on exécute à nouveau le programme en choisissant l'image obtenu on pourra alors vérifier que $f \circ f(n) = n^2$