

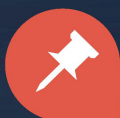
Le bulletin de l'APMEP - N° 559

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Janvier, février, mars 2026

**Chercher**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : [secretariat-apmep@orange.fr](mailto:secretariat-apmep@orange.fr) - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

*Au fil des maths*, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : Cécile KERBOUL.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET.

**Équipe TeXnique** : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Pol LE GALL, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Correspondants Publimath** : Marie-Line MOUREAU, François PÉTIARD.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : mars 2026. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



# Duo de flocons

*Si on jouait avec le flocon de von Koch ? C'est ce que nous propose Robert March, dans cet article où, en plus de se régaler et d'ouvrir des possibilités de constructions dès le cycle 3, on peut s'amuser à découvrir ou retrouver ses propriétés mathématiques étonnantes.*

**Robert March**



La construction classique du flocon de von Koch consiste à remplacer un segment de longueur 1 par quatre segments de longueur  $\frac{1}{3}$ , puis d'itérer ce procédé à l'infini. On a donné à cette courbe fractale le nom de courbe de von Koch en hommage au mathématicien suédois qui l'a étudiée dès 1904, bien avant que le mot fractale ait été créé par Benoît Mandelbrot.

Si on applique la courbe obtenue à chaque itération aux trois côtés d'un triangle équilatéral, on obtient une suite de flocons dont le périmètre croît à l'infini alors que l'aire, on le verra, a une limite finie. On a également donné le nom de flocon de von Koch à la figure obtenue lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

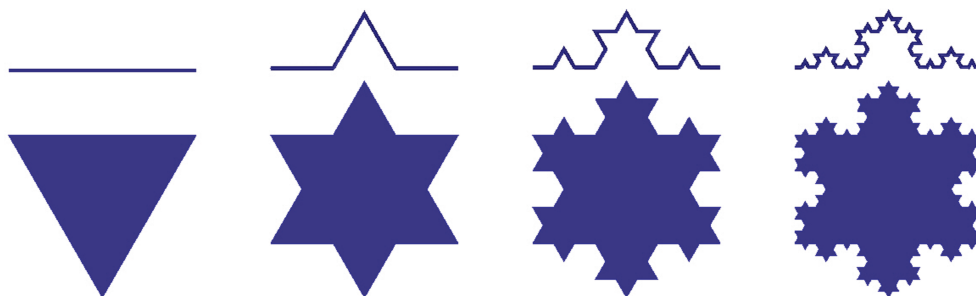


Figure 1.

En partant maintenant non pas d'un triangle équilatéral mais d'un hexagone régulier et en tournant les pointes vers l'intérieur, on construit par itération un nouveau type de flocon. On montre que l'on obtient également, à l'infini, un flocon de von Koch.

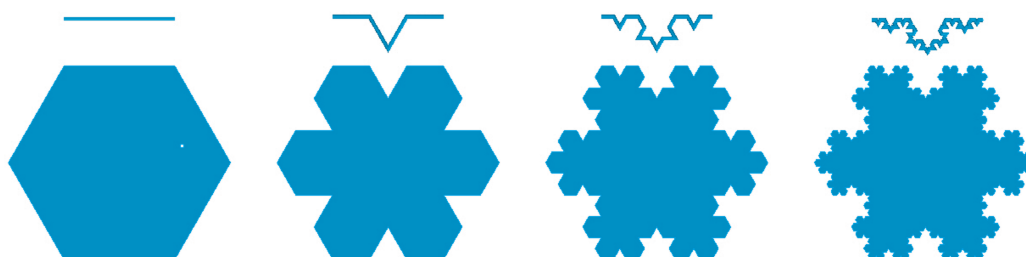


Figure 2.

C'est également une structure fractale, qui présente aussi l'étonnante singularité d'être une ligne fermée qui ne se recoupe pas, dont la longueur est infinie et dont l'aire a une limite finie.



Voilà bien deux jumeaux qui se ressemblent de plus en plus au fil des itérations... mais sans jamais se confondre pour autant ! Sauf à l'infini !

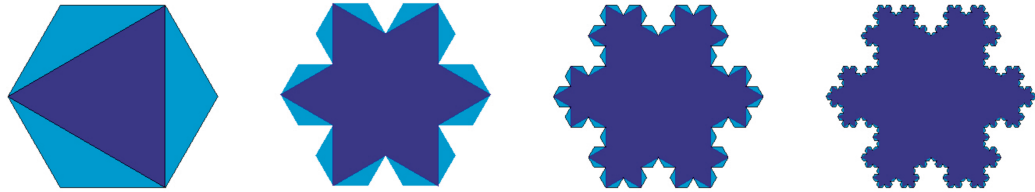


Figure 3.

## Pavages

Le flocon de von Koch présente une propriété étonnante : on montre qu'il permet un pavage périodique du plan.

On peut généraliser cette propriété en combinant divers flocons jumeaux, qu'on nommera  $F_n$  et  $F'_n$ , à différentes étapes de leur croissance, ce qui permet de générer une infinie variété de pavages du plan.

Une condition nécessaire pour pouvoir réaliser de tels pavages est que les longueurs des côtés des polygones adjacents soient égales. Le plus simple est de partir de la figure formée par un triangle équilatéral et un hexagone régulier adjacents, et de l'agrandir d'un coefficient 3, 9, 27, etc. compte tenu qu'à chaque itération la longueur des côtés est divisée par 3.

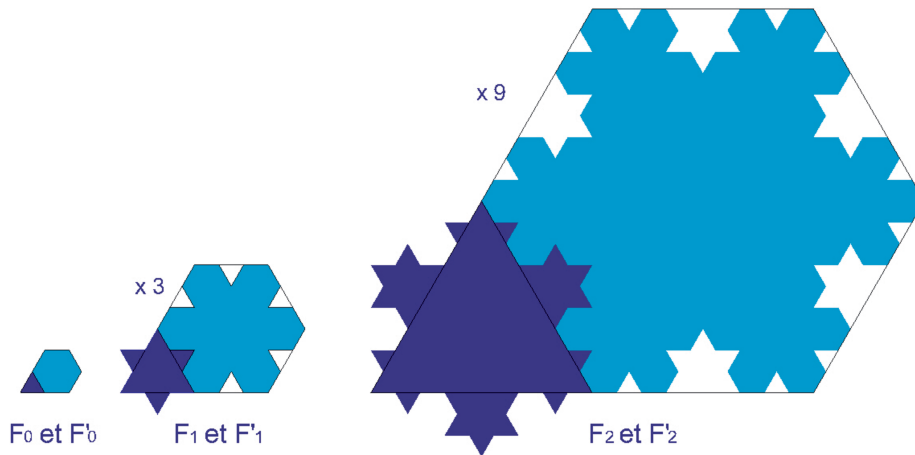


Figure 4.



À titre d'exemple, les pavages ci-dessous ont été réalisés avec des flocons  $F_1$  et  $F'_1$  et  $F_2$  et  $F'_1$ .

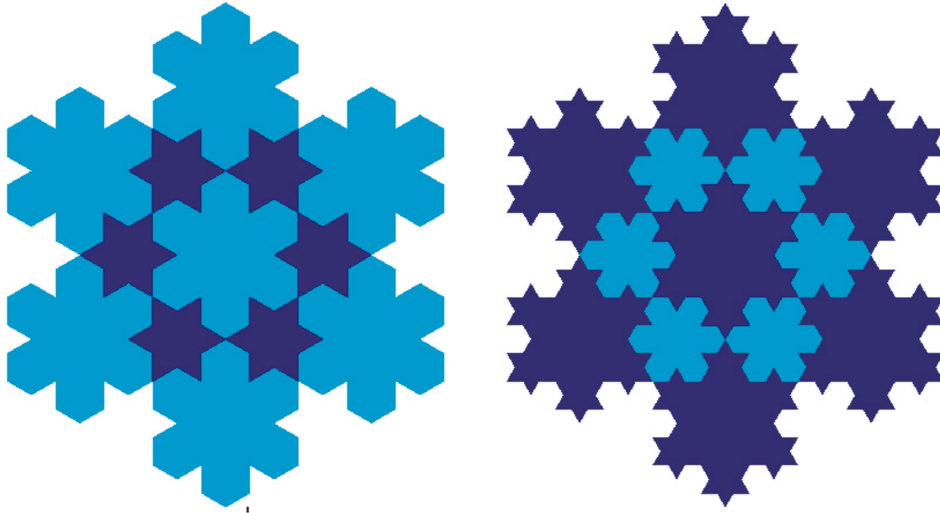


Figure 5.

On peut également utiliser comme trame un pavage régulier fait de triangles équilatéraux.

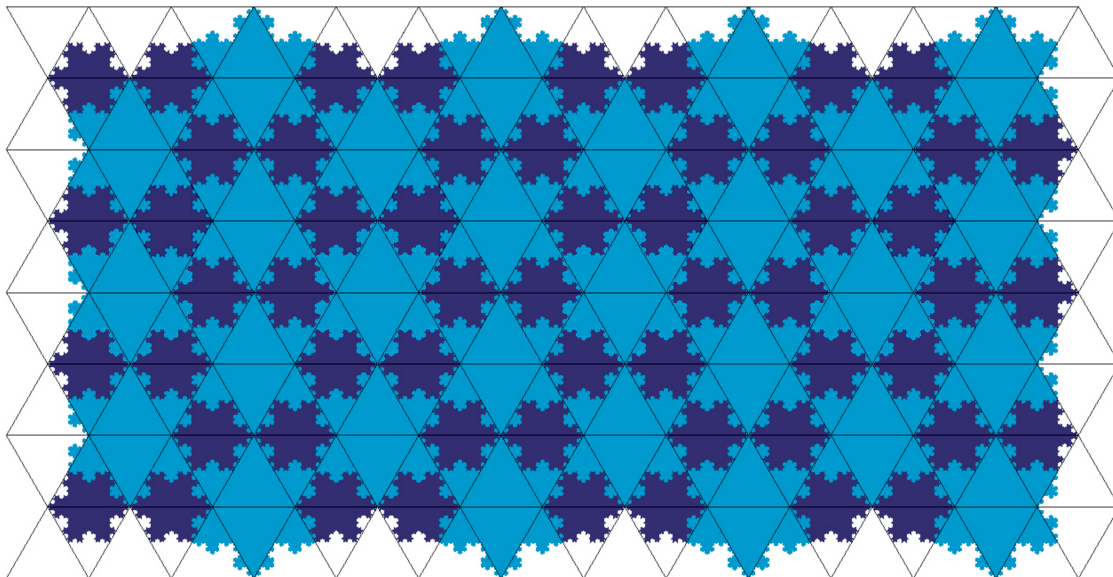


Figure 6.



Voici une variante pour construire les flocons avec une même longueur d'arête : on peut prendre comme trame un pavage semi-régulier trihexagonal :

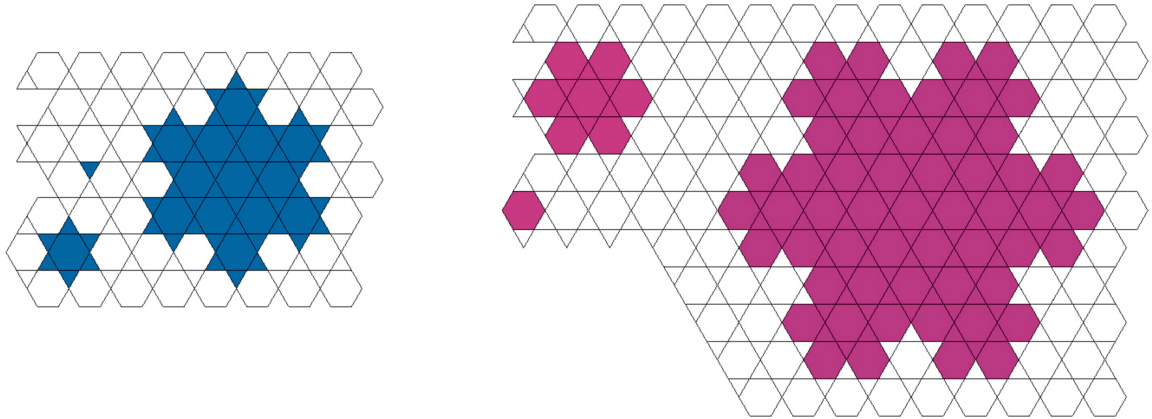


Figure 7.

On peut encore remarquer qu'il est possible en utilisant un flocon  $F_2$  de construire  $F_3$  et  $F'_2$  ; avec  $F_3$  de construire  $F_4$  et  $F'_3$  ; et plus généralement avec  $F_n$  de construire  $F_{n+1}$  et  $F'_n$ . En assemblant six  $F_n$  on forme une couronne hexagonale dont le contour extérieur est un flocon  $F_{n+1}$  et le contour intérieur un flocon  $F'_n$ .

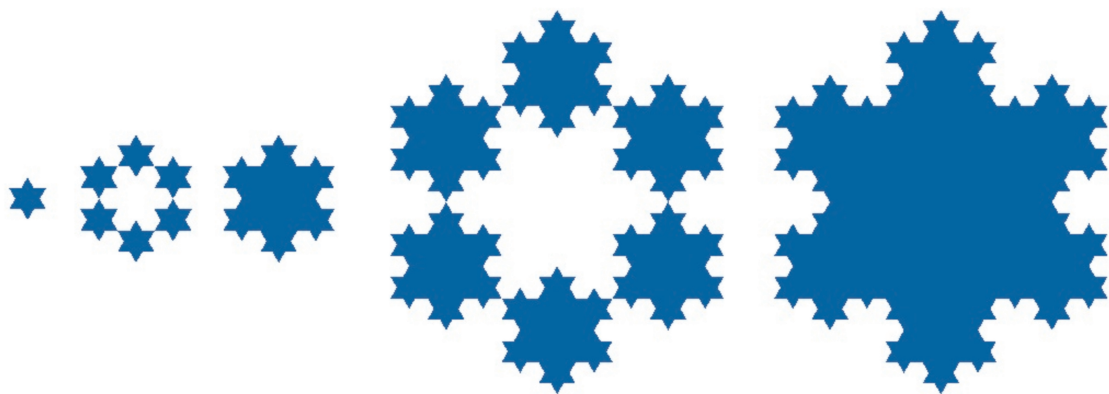


Figure 8.



Et voici  $F_4$  et  $F'_3$  :

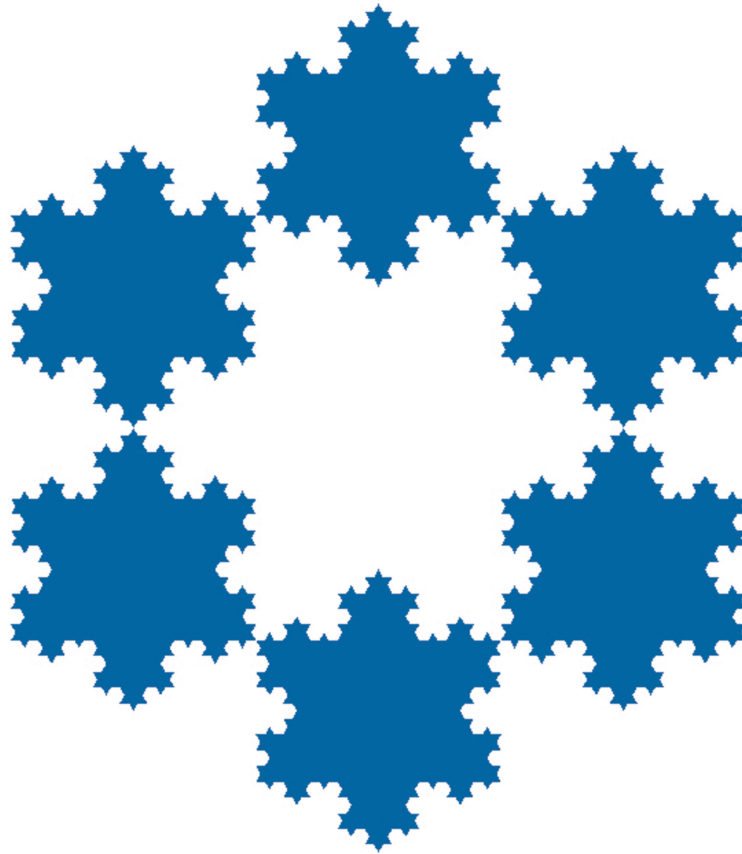


Figure 9.

Une autre propriété intéressante est qu'un flocon peut être décomposé en utilisant des flocons de rang inférieur. Voici deux décompositions de  $F_5$  :

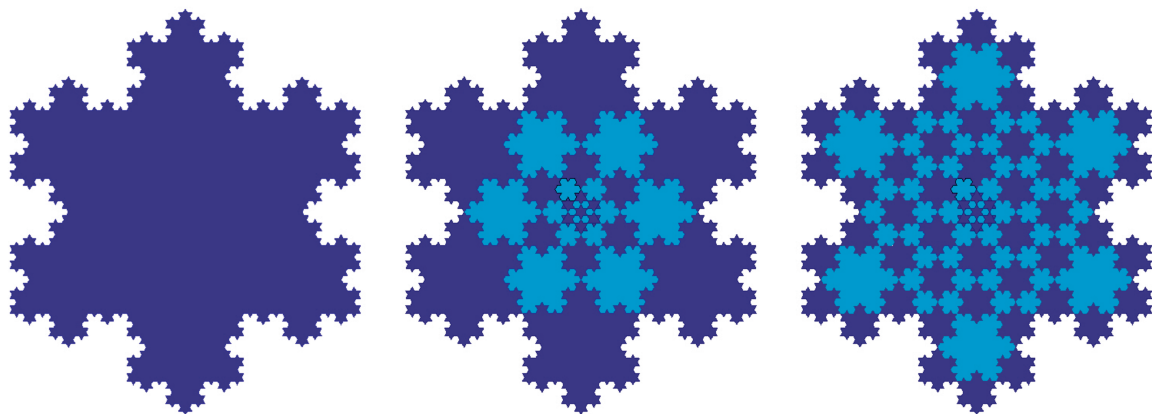


Figure 10.



Mais on peut aussi laisser libre cours à son imagination !

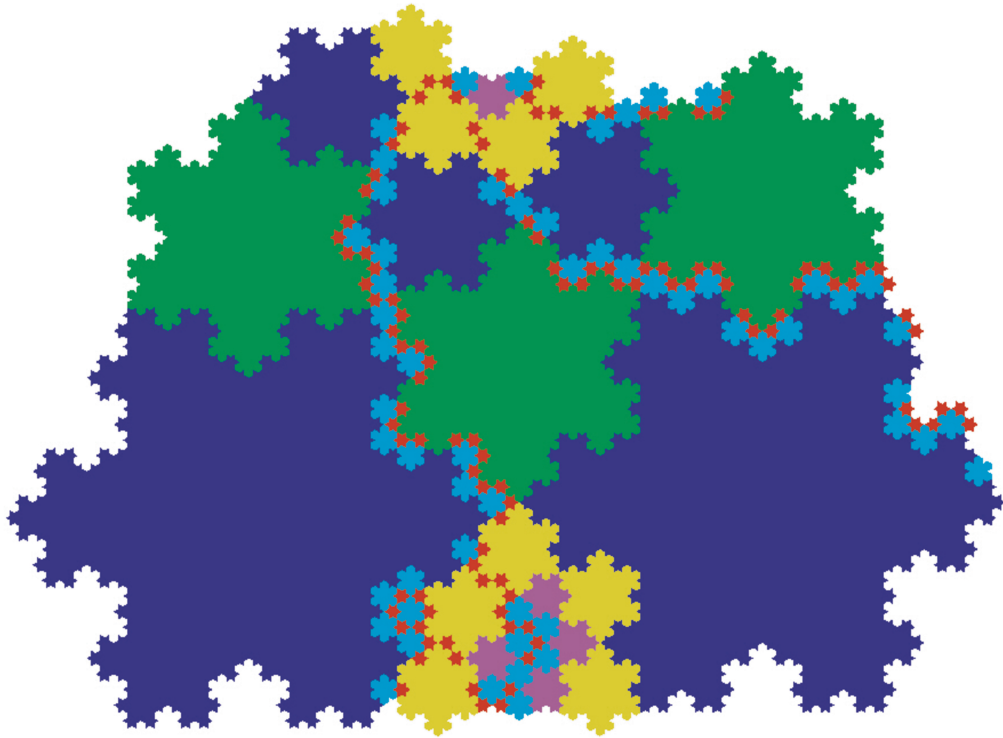


Figure 11.

Ces flocons, tout infinis qu'ils soient dans leur déclinaison, ne se prêtent guère à la fabrication de boules ou de bonshommes de neige. Mais ils sont parfaits pour réaliser... jusqu'à l'infini... de magnifiques manteaux neigeux !

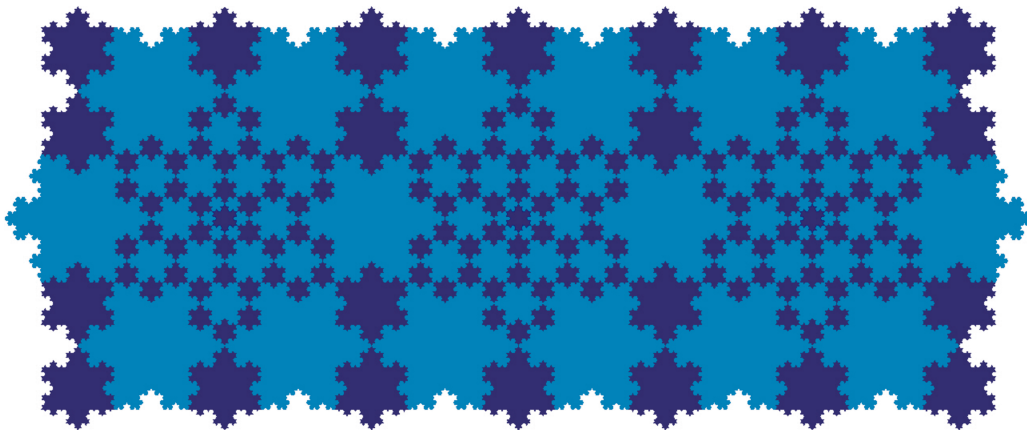


Figure 12.



## Pour terminer : études des deux familles de flocons

Désignons par  $F_n$  le flocon classique construit à partir d'un triangle équilatéral, au terme de  $n$  itérations, et par  $F'_n$  son jumeau construit à partir d'un hexagone régulier.

### Périmètres

On prend comme unité de longueur celle du côté du triangle équilatéral initial. Celle de l'hexagone circonscrit est alors égale à  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Pour  $F_n$  : à chaque itération le nombre de côtés est multiplié par 4 et la longueur d'un côté divisée par 3.  $F_n$  a  $3 \times 4^n$  côtés et a pour périmètre  $L_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .

Pour  $F'_n$  : à chaque itération le nombre de côtés est multiplié par 4 et la longueur d'un côté divisée par 3.  $F'_n$  a  $6 \times 4^n$  côtés (soit le double de  $F_n$ ) et a pour périmètre  $L'_n = 2 \times \sqrt{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .

On remarque que  $\frac{L'_n}{L_n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , qui est indépendant de  $n$ , et comme  $F'_n$  a deux fois plus de côtés que  $F_n$ , le rapport des longueurs de leurs côtés est égal à  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$L_n$  et  $L'_n$  sont des suites géométriques de raison  $\frac{4}{3}$  et tendent donc vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

### Aires

On prend comme unité d'aire celle du triangle initial. Celle de l'hexagone est alors égale à 2.

Pour  $F_n$  : à la première itération, l'aire ajoutée est égale à  $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ .

À chaque itération suivante le nombre de triangles ajoutés est multiplié par 4 et leur aire est divisée par 9, donc à la  $n$ -ième itération l'aire du flocon est augmentée de  $\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$  (avec  $n \geq 1$ ).

On a donc :

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= 1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Le calcul de  $A_n$  fait intervenir la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{4}{9}$ .

$A_n$  est une suite croissante qui tend vers  $1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Pour  $F'_n$  : à la première itération, l'aire retranchée est égale à  $6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ .

À chaque itération suivante le nombre de nouveaux triangles retranchés est multiplié par 4 et leur aire est divisée par 9, donc la  $n$ -ième itération diminue l'aire du flocon de  $\frac{2}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$  (avec  $n \geq 1$ ).





On a donc :

$$\begin{aligned} A'_n &= 2 - \frac{2}{9} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= 2 - \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= 2 - \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Le calcul de  $A'_n$  fait intervenir la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{4}{9}$ .  $A'_n$  est une suite décroissante qui tend vers  $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

$A'_n$  et  $A_n$  sont donc deux suites adjacentes.

Et l'on a :

$$\begin{aligned} A'_n - A_n &= \left(2 - \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right) - \left(1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

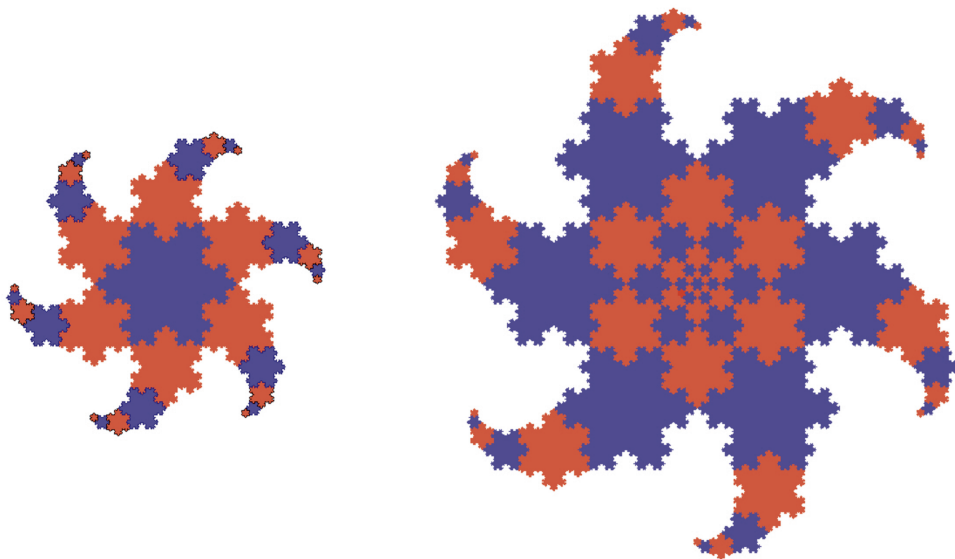
La différence entre les deux aires est une suite géométrique, qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.



Robert March est maître de conférences retraité et a enseigné en sciences et techniques pour l'architecture.

[robermarch@gmail.com](mailto:robermarch@gmail.com)

© APMEP mars 2026





# Sommaire du n° 559



## Chercher

### Éditorial

### Opinions

#### ✦ Être chercheur...

*Julien Barré* ..... 3

#### ✦ Chercher

*Olivier Longuet* ..... 5

### Avec les élèves

#### ✦ Construction du village des Lilliputiens

*Manuela Freyermuth & Florence Soriano-Gafiuk* ..... 7

#### ✦ Démarche d'investigation en maths

*L. Mortier-Cougoulic, É. Covez, C. Guillon-Kroon,  
O. Poulard & G. Simonneau* ..... 17

#### ✦ Renouer avec le plaisir de chercher

*Angelo Laplace* ..... 23

#### ✦ Et si on cherchait ?

*Lise Malrieu* ..... 35

#### ✦ Chercher ? Ça s'apprend... et ça s'évalue !

*Équipe DREAM (IREM de Lyon)* ..... 46

### Ouvertures

#### Des élections prétendument équitables

*Antonella Perucca* ..... 55

#### ✦ Les fils d'Ariane

*Philippe Grillot & Ilme Gruner* ..... 59

### 1 Récréations

#### ✦ Au fil des problèmes

*Frédéric de Ligt* ..... 63

#### ✦ Problèmes dans nos classes

*Séverine Chassagne-Lambert & Cécile Kerboul* ..... 65

#### Duo de flocons

*Robert March* ..... 67

### Au fil du temps

#### Curiosité de Roger Mansuy

*Valérie Larose* ..... 75

#### Matériaux pour une documentation

 ..... 77

#### Hommage à Michèle Audin

*Régionale d'Alsace* ..... 79

#### Les nombres en couleurs

*Jean Fromentin & Nicole Toussaint* ..... 81

#### L'instituteur de Thuin (1891-1976)

*Gilbert Walusinski* ..... 83

#### Hommage à Jean-Louis Piednoir

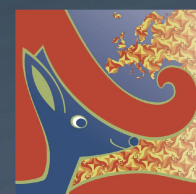
*Brigitte Chaput, Michel Henry & Bernard Parzys* ..... 86

#### Amour et désamour...

*Jean-Louis Piednoir* ..... 89



CultureMATH



# APMEP

www.apmep.fr